
A STUDY OF BUS TRAJECTORY DURING THE DECELERATE PASSAGE THROUGH A CURVE

Krumpholc T., Bartoň S.

Department of Engineering and Automobile Transport, Faculty of Agronomy, Mendel University in Brno, Zemědělská 1, 613 00 Brno, Czech Republic

E-mail: xkrumpho@mendelu.cz

ABSTRACT

In this article the basic concepts of mathematical modeling of active factors impacting the driving kinematics and dynamics of a bus are formulated.

Impacts of velocity, driving course and rate of course changes are analyzed. These are the leading momentum factors which the driver can influence using a steering wheel, accelerator and brake pedal, which are the key operating elements of the vehicle.

On the basis of the preset operating elements it is possible to determine all kinematics and dynamics variables using a derived model defining the trajectory of each point of the vehicle movement.

It is possible to specify the exact range of safe values of key elements that ensure safe and a smooth ride of the bus.

Key words: mathematical modeling, position vector, velocity, acceleration, osculation curve, curvature, trajectory

ÚVOD

Hromadná doprava ve městě se stala neoddělitelnou a nutnou součástí člověka, jako projev života a jeho potřeb. Denně zajišťuje přepravu velkého množství cestujících směřujících za prací, povinnostmi, školou, nákupy, sportem, zábavou, koníčky, kulturou, apod.

Dle konkrétních požadavků a potřeb základní obslužnosti města existují druhy hromadných doprav jakožto závislá trakce (tramvaje, trolejbusy) a nezávislá trakce (autobusy).

Autobus-pojem vznikl z dřívějšího označení pro nekolejové vozidlo veřejné hromadné dopravy osob tažené koňmi *Omnibus* a to složením slov AUTomobilní *omni*BUS. Konstrukční prvky autobusů se v mnohém neliší od nákladních automobilů, kdy se dá říci, že autobus je vlastně přepracovaný nákladní vůz pro přepravu osob.

Autobus městské hromadné dopravy je speciální dopravní prostředek, který je uzpůsoben tak, aby nabízel co nejlepší manévrovatelnost, což s sebou ale přináší také specifická chování v určitých situacích. Rozvor náprav zde hraje velmi významnou roli, protože autobus o délce dvanácti metrů, který má být obratný, musí mít značné převisy karoserie a to jak ve předu, kde řidič kola se nachází až daleko za řidičem, tak vzadu.

Při dnešní produkci autobusů je kladen důraz především na efektivitu provozu, jízdní pohodlí, ale hlavně na bezpečnost přepravovaných osob. Základy mechaniky a fyziky jízdy jsou zde proto velice důležité. Pro řešení dynamiky vozidla ale nestačí vyšetřit pouze dynamiku vozidla, nýbrž je nutné vyjádřit matematicky reakce a jednání řidiče.

Řidič je tak důležitým aktivním prvkem pro bezpečnost v silničním provozu. Určuje rychlost a směr pohybu vozidla a koriguje možnosti stroje s možnostmi prostředfí. Ovládá vozidlo řízením, brzděním, popř. zrychlováním. Na toto ovládání reaguje vozidlo tak, že řidič porovnává tyto informace se zadanými požadovanými veličinami a pro dosažení požadovaného kurzu své vozidlo neustále usměřňuje.

Řidič autobusu je určitou formou společenské práce, jako poslední článek dopravního cyklu v osobní přepravě osob. Jeho prací je přeprava cestujících při dodržení jízdního řádu, které však nesmí být na úkor bezpečnosti či komfortu jízdy. Jeho práce je psychology charakterizovaná jako velmi stresová se zodpovědností jak materiální (za vozidlo) tak morální (za cestující). Přispívá k bezpečnosti v silničním provozu a to jak aktivně (odvracením možných střetů), tak pasivně (jeho chování nepřímo ovlivňuje velké množství převážených osob). To, co je pro řidiče důležité je znát základy fyziky a mechaniky jízdy při průjezdu zatáčkou. Velmi důležitou roli zde hraje odstředivá síla, jejíž velikost závisí na poloměru zatáčky a rychlosti průjezdu. Protože se zatím

nepodařilo jednoznačně stanovit souvislost mezi různými jízdními manévry a tzv. subjektivní ovladatelností, tj. vlastnostmi vozidla z hlediska lidských schopností, budeme se zabývat matematickým modelováním pohybu autobusu s ohledem na zásahy řidiče do ovládání tohoto vozu.

MATERIÁL A METODIKA

Práce navazuje na detailní matematický model kinematiky vozidla vypracovaný Krumpholcem a Bartoněm (2011). Využívá stejné vstupní hodnoty konstrukčních parametrů a je opět využito programu Maple. Výše uvedený model proto zde již nebude dále diskutován.

Vzhledem k rozsáhlým tvarům analytických výrazů odvozených v průběhu výpočtu použijeme následující konstrukční substituce, které korespondují s reálnými konstrukčními parametry.

Základní odvozené vztahy

> **restart**; Počáteční příkaz pro oddělení od předchozích příkazů.

> **with(plots)**; Otevření knihovny příkazů pro grafiku.

> **read "Kinem_I.sav"**; Použijeme vztahy odvozené Krumpholcem a Bartoněm (2011).

V_x, V_y - vektor rychlosti - rychlost vozidla ve směru osy x a y jsou derivace souřadnic podle času; A_x, A_y - vektor zrychlení - zrychlení vyjadřuje změnu rychlosti vozidla za jednotku času.

$$V_x := \frac{d}{dt} X(t), \quad V_y := \frac{d}{dt} Y(t), \quad A_x := \frac{d^2}{dt^2} X(t), \quad A_y := \frac{d^2}{dt^2} Y(t) \quad (1)$$

A_t - tečné zrychlení - udává zrychlení vozidla ve směru tečny k trajektorii, vyjadřuje tedy změnu velikosti rychlosti - brzda / plyn.

$$A_t := \frac{\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} X(t)\right) + \left(\frac{d}{dt} Y(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t)\right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} Y(t)\right)^2}} \quad (2)$$

A_n - normálové zrychlení - udává zrychlení ve směru kolmém na trajektorii, tedy je úměrné zakřivení trajektorie. Je vždy kolmé na tečné. Vyjadřuje změnu směru rychlosti.

$$A_n := \frac{-\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t)\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} X(t)\right)\left(\frac{d}{dt} Y(t)\right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} Y(t)\right)^2}} \quad (3)$$

AA - absolutní velikost zrychlení, AV - absolutní velikost rychlosti - ukazuje tachometr.

$$AV := \sqrt{\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} Y(t)\right)^2}, \quad AA := \sqrt{\left(\frac{d^2}{dt^2} X(t)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t)\right)^2} \quad (4)$$

CO_x CO_y - střed oskulační kružnice - kružnice nejlépe vystihující průběh křivky daného bodu.

$$CO_x := \frac{1}{4} \left(4 \left(\frac{d^2}{dt^2} X(t) \right) X(t) \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right) + 4 \left(\frac{d}{dt} X(t) \right)^2 \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right) + 4 \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right)^3 - 4 X(t) \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t) \right) \right) / \left(- \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} X(t) \right) \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right) \right) \quad (5)$$

$$CO_y := \frac{1}{4} \left(-4 \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) Y(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t) \right) + 4 \left(\frac{d^2}{dt^2} X(t) \right) \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right) - 4 \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right)^2 - 4 \left(\frac{d}{dt} X(t) \right)^3 \right) / \left(- \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t) \right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} X(t) \right) \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right) \right) \quad (6)$$

κ (κ) - křivost trajektorie, Častěji než poloměr se používá křivost = 1/poloměr oskulační kružnice. Udává velikost zakřivení křivky v daném bodě.

$$\kappa := \frac{-\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} Y(t)\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} X(t)\right)\left(\frac{d}{dt} Y(t)\right)}{\left(\left(\frac{d}{dt} X(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} Y(t)\right)^2\right)^{3/2}} \quad (7)$$

XII, YII - souřadnice polohového vektoru - později budou dosazovány za $X(t)$ a $Y(t)$.

$$XII := \int_0^t \cos\left(\int_0^\tau v(\tau)k(\tau)d\tau\right) v(\tau)d\tau, \quad YII := \int_0^t \sin\left(\int_0^\tau v(\tau)k(\tau)d\tau\right) v(\tau)d\tau \quad (8)$$

Trajektorie středu zadní nápravy autobusu při průjezdu zatáčkou

Jízda po kruhové dráze konstantní rychlostí je jednou z nejstarších metod zkoušení ovladatelnosti vozidla. Faktory, ovlivňující trajektorii pohybu při jízdě zatáčkou můžeme rozdělit do dvou skupin, **faktory pasivní** - stavy, které řidič ovlivnit nemůže (sem patří například počasí, konstrukce vozidla, povrch vozovky, opotřebení pneumatik,...) a dále **faktory aktivní** - věci ovlivnitelné řidičem (zejména nájezdová rychlost do zatáčky, poloha pedálu plynu, brzdy a spojky, natočení volantu, volba jízdní stopy,...).

Mezi základní kinematické veličiny, které jsou přímo ovlivnitelné řidičem patří zejména rychlost jízdy a její změna v čase způsobená sešlápnutím plynového nebo brzdového pedálu - tedy tečné zrychlení a dále úhel natočení přední nápravy což nám udává poloměr oskulační kružnice. Obě dvě veličiny může řidič ovládat nezávisle na sobě a spolu s vektorem počáteční rychlosti tak určit budoucí trajektorii vozidla. Naším cílem proto bude stanovit jak změna těchto veličin ovlivňuje budoucí trajektorii autobusu a jeho stabilitu.

Nejprve stanovíme polohový vektor středu zadní nápravy autobusu. Polohový vektor nám poslouží k popisu polohy tělesa a určí nám pohyb hmotného bodu tj. trajektorii pohybu, kterou lze popsat změnou polohového vektoru v čase.

> P:= $[XII,YII]$;

$$P := \left[\int_0^t \cos \left(\int_0^\tau v(\tau) k(\tau) d\tau \right) v(\tau) d\tau, \int_0^t \sin \left(\int_0^\tau v(\tau) k(\tau) d\tau \right) v(\tau) d\tau \right] \quad (9)$$

Dosadíme do vektoru rychlosti, po zjednodušení získáme výsledný tvar.

> V:=subs(X(t)=XII,Y(t)=YII,[Vx,Vy]): > V:=simplify(V);

$$V := \left[\cos \left(\int_0^t v(\tau) k(\tau) d\tau \right) v(t), \sin \left(\int_0^t v(\tau) k(\tau) d\tau \right) v(t) \right] \quad (10)$$

Dále dosadíme do vztahu pro absolutní velikost zrychlení.

> Aa:=subs(X(t)=XII,Y(t)=YII,AA);

$$Aa := \left(\left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\int \cos \left(\int v(\tau) k(\tau) d\tau \right) v(\tau) d\tau \right) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\int \sin \left(\int v(\tau) k(\tau) d\tau \right) v(\tau) d\tau \right) \right)^2 \right)^{1/2} \quad (11)$$

Po zjednodušení dostáváme výsledný tvar.

> Aa:=simplify(Aa,symbolic);

$$Aa := \sqrt{v(t)^4 k(t)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2} \quad (12)$$

Provedeme dosazení numerických hodnot do základních odvozených vztahů analytického řešení k získání trajektorie pohybu autobusu. Jedná se o modelový příklad autobusu o rozměrech s konstrukčními parametry, kde rozvor náprav $d = 6 \text{ m}$, převodový poměr mezi volantem a přední nápravou $n = 2$, počáteční rychlost autobusu $V_0 = 7 \text{ m.s}^{-1}$, která byla volena, tak aby maximální hodnota normálového zrychlení nepřesáhla $A_n = 2.5 \text{ m.s}^{-2}$, což považujeme za bezpečnou hranici při průjezdu zatáčkou.

Numerické hodnoty použité v průběhu výpočtu.

> **Su := [V0=7,n=2,d=6];**

$$Su := [V_0 = 7, n = 2, d = 6] \quad (13)$$

Trajektorie pro mezní brzdění - rychlost po projetí zatáčky bude nulová

Brzdění v zatáčce je pro aktivní bezpečnost vozidla jedním z nejdůležitějších jízdních testů. Na ovladatelnost vozidla při brzdění v zatáčce mají výrazný vliv zejména tyto parametry: okamžité rozdělení brzdících sil (např. změna zatížení), sklon k nedotáčivosti (přetáčivosti), boční pohyby těžiště (např. změna boční tuhosti pneumatik, výšky těžiště), moment setrvačnosti k vodorovné ose (např. rozložení nákladu). Mezní brzdění je způsobeno takovým zpomalením a, při kterém autobus zastaví právě v okamžiku výjezdu ze zatáčky. Výsledky budou zobrazeny v grafickém znázornění silnou modrou křivkou.

Postup vychází ze vztahu pro výpočet křivosti k , při průjezdu zatáčkou s nejmenším poloměrem $r_{min} = d \cdot n$, kde v = rychlost pohybu vozidla, k = křivost trajektorie, tf je čas výjezdu ze zatáčky.

> **v:=unapply(V0-a*t,t); k:=unapply(t*(tf-t)*4/tf^2/d/n,t);**

$$v := t \rightarrow V_0 - at, \quad k := t \rightarrow \frac{4t(tf-t)}{tf^2 d n} \quad (14)$$

Po dosazení za v a k lze zjednodušit polohový vektor P na tvar PV .

> $PV := \text{value}(P)$;

$$PV := \left[\int_0^t \cos \left(-\frac{a\tau^4}{tf^2 dn} - \frac{4(-V0 - atf)\tau^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0\tau^2}{tf dn} \right) (V0 - a\tau) d\tau, \right. \\ \left. \int_0^t -\sin \left(-\frac{a\tau^4}{tf^2 dn} - \frac{4(-V0 - atf)\tau^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0\tau^2}{tf dn} \right) (V0 - a\tau) d\tau \right] \quad (15)$$

Podobně lze zjednodušit i vektor rychlosti V na VV .

> $VV := \text{value}(V)$;

$$VV := \left[\cos \left(-\frac{at^4}{tf^2 dn} - \frac{4(-V0 - atf)t^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0t^2}{tf dn} \right) (V0 - at), \right. \\ \left. -\sin \left(-\frac{at^4}{tf^2 dn} - \frac{4(-V0 - atf)t^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0t^2}{tf dn} \right) (V0 - at) \right] \quad (16)$$

Nejprve je nutné stanovit kritéria pro dokončení průjezdu zatáčkou. Pokud jde o zatáčku o 90° a počáteční rychlost je rovnoběžná s osou x , pak po ukončení zatáčky musí být výsledná rychlost rovnoběžná s osou y a složka rychlosti v ose x musí být rovna 0. Proto musí platit rovnice $e1$, kde tf je čas ukončení průjezdu. Nestačí řešit $V0 - at = 0$, protože by mohlo nastat, že autobus zastaví i někde uvnitř zatáčky.

> $e1 := \text{op}(1, \text{op}(1, VV[1])) = -\pi/2$;

$$e1 := -\frac{at^4}{tf^2 dn} - \frac{4(-V0 - atf)t^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0t^2}{tf dn} = -\frac{\pi}{2} \quad (17)$$

Vztah eI po zjednodušení.

> e1:=simplify(subs(t=tf,e1));

$$e1 := -\frac{tf(-atf + 2V0)}{3dn} = -\frac{\pi}{2} \quad (18)$$

Z rovnice eI je možné vypočítat tf – dobu průjezdu zatáčkou. Řešení uložíme do proměnné TF , která obsahuje dvě řešení, pouze druhé má pro nás fyzikální význam.

> TF:=solve(e1,tf);

$$TF := \left[\frac{2V0 + \sqrt{4V0^2 - 6a\pi dn}}{2a}, -\frac{-2V0 + \sqrt{4V0^2 - 6a\pi dn}}{2a} \right] \quad (19)$$

Pokračujeme s nalezeným řešením TF [2].

> TF:=TF[2];

$$TF := -\frac{-2V0 + \sqrt{4V0^2 - 6a\pi dn}}{2a} \quad (20)$$

Z hodnoty tf lze získat hodnotu mezního zpomalení $A0$ – položením výrazu pod odmocninou rovným nule. Z matematického hlediska hledáme dvojnásobný kořen rovnice eI .

> e2:=op(2,op(2,TF))=0;

$$e2 := \sqrt{4V0^2 - 6a\pi dn} = 0 \quad (21)$$

Výsledkem je mezní zrychlení, při kterém zastaví autobus na konci zatáčky.

> A0:=solve(e2,a);

$$A0 := \frac{2V0^2}{3\pi d n} \quad (22)$$

Numerická hodnota mezního zrychlení pro zvolené numerické hodnoty.

> a0:=evalf(subs(Su,A0));

$$a0 := 0.8665102454 \quad (23)$$

Vypočtená numerická hodnota pro finální čas průjezdu.

> Tfs:=evalf(subs(a=A0,Su,TF));

$$Tfs := 8.078381109 \quad (24)$$

Protože i ve zjednodušeném tvaru lze integrály ve výsledných vztazích řešit pouze numericky provedeme všechny následující výpočty potřebné pro tvorbu grafů pro 200 časových okamžiků.

> T:=Tfs/200*[\$0..200];

Polohový vektor pro zadané numerické hodnoty.

> PVs:=subs(Su,a=a0,tf=Tfs,PV);

200 polohových vektorů.

> TR:=seq(evalf(PVs),t=T);

Trajektorie pro $a=A0$.

> GTA0:=plot(TR,thickness=2,color=blue);

Vektor rychlosti pro zadané numerické hodnoty.

> VVs:=subs(Su,a=a0,tf=Tfs,VV);

Podmínky k vektoru rychlosti.

> TV:=seq(evalf(VVs),t=T);

Graf vektoru rychlosti pro $a=A0$.

```
> GVA0:=plot(TV,color=blue,thickness=2):
```

Absolutní velikost vektoru zrychlení pro zadané numerické hodnoty.

```
> AAs:=subs(Su,a=a0,tf=Tfs,Aa):
```

Graf absolutní velikosti zrychlení pro $a=A0$.

```
> GAA0:=plot(AAs,t=0..Tfs,numpoints=1000,color=blue,thickness=2):
```

Zobrazení trajektorie autobusu pro hodnoty zpomalení z intervalu (0, mezní zpomalení A0)

Výpočet je velmi podobný předešlému, jen se mění hodnota zpomalení a ve funkci rychlosti v , viz rovnice (14), tím se mění i odpovídající časy průjezdu zatáčkou tf , viz rovnice (20). Odpovídající trajektorie jsou zakresleny černou barvou.

```
> nu:=25:
```

```
> for j from 1 to nu-1 do;
```

```
> Su:=[V0=7,a=a0/nu*j,n=2,d=6];
```

```
> Tfs:=evalf(subs(Su,TF));
```

```
> PVs:=subs(Su,tf=Tfs,PV);
```

```
> T:=Tfs/100*[$0..100];
```

```
> TR:=seq(evalf(PVs),t=T);
```

```
> Q1[j]:=plot(TR,color=black):
```

```
> VVs:=subs(Su,tf=Tfs,VV);
```

```
> TV:=seq(evalf(VVs),t=T);
```

```
> Q2[j]:=plot(TV,color=black):
```

```
> AAs:=subs(Su,tf=Tfs,Aa);
```

```
> Q3[j]:=plot(AAs,t=0..Tfs,numpoints=1000,color=black):
```

```
> print(j);
```

```
> end do;
```

Výpočet pro průjezd zatáčky konstantní rychlostí

Funkce v udávající závislost rychlosti autobusu na čase bude velmi jednoduchá. Postup výpočtu je velmi podobný předchozímu. Proto nebude příliš podrobně komentován. Je ve výsledcích zobrazen silnou červenou křivkou.

> v:=unapply(V0,t);

$$v := t \rightarrow V0 \quad (25)$$

Tvar polohového vektoru po dosažení.

> PV:=value(P);

$$PV := \left[\int_0^t \cos\left(\frac{4V0\tau^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0\tau^2}{tf dn}\right) V0 d\tau, \int_0^t -\sin\left(\frac{4V0\tau^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0\tau^2}{tf dn}\right) V0 d\tau \right] \quad (26)$$

Tvar vektoru rychlosti po dosažení.

> VV:=value(V);

$$VV := \left[\cos\left(\frac{4V0t^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0t^2}{tf dn}\right) V0, -\sin\left(\frac{4V0t^3}{3tf^2 dn} - \frac{2V0t^2}{tf dn}\right) V0 \right] \quad (27)$$

Zatáčka je ukončena, když je rychlost v ose x nulová, což znamená, že $\cos(-\pi/2)=0$.

> e1:=simplify(subs(t=tf,op(1,VV[1])))=-Pi/2;

$$e1 := -\frac{2tf V0}{3 dn} = -\frac{\pi}{2} \quad (28)$$

Získáme obecný čas ukončení průjezdu autobusu zatáčkou.

> TF:=solve(e1,tf);

$$TF := \frac{3\pi d n}{4V0} \quad (29)$$

Čas ukončení zatáčky pro zvolené numerické hodnoty Su .

> Tfs:=evalf(subs(Su,TF));

$$Tfs := 4.039190556 \quad (30)$$

Výpočet se provede pro 200 časových okamžiků.

> T:=Tfs/200*[\$0..200];

Dosadíme numerické hodnoty do vztahu pro polohový vektor.

> PV:=value(subs(tf=Tfs,Su,P));

Vypočteme polohy pro jednotlivé časy T .

> TR:=[seq(evalf(PV),t=T)];

Získáme trajektorii pro $a=0$ zobrazena v grafickém znázornění – Graf č. 1 – silná červená křivka.

> GTV0:=plot(TR,thickness=2,color=red);

Dosadíme numerické hodnoty do vztahu pro vektor rychlosti.

> VVs:=subs(Su,tf=Tfs,VV);

Vypočteme vektor rychlosti pro časy T .

> TV:=[seq(evalf(VVs),t=T)];

Získáme vektor rychlosti pro $a=0$ viz. grafické znázornění – Graf č.2 – silná červená křivka.

> GVV0:=plot(TV,color=red,thickness=2);

Dosadíme numerické hodnoty do vztahu pro absolutní velikost vektoru zrychlení.

> AAs:=subs(Su,tf=Tfs,Aa);

Dostáváme grafické znázornění absolutní velikosti zrychlení pro $a=0$, viz. Graf č.3 – silná červená křivka.

> **GA0:=plot(AAs,t=0..Tfs,numpoints=1000,color=red,thickness=2):**

Trajektorie autobusu při ustáleném zatáčení (červená-nebrzděná, modrá-brzděná do zastavení, černá-zpomalení v intervalu $(0, a0)$), viz. Graf č.1.

> **display({GTV0,GTA0,seq(Q1[j],j=1..nu-1)},labels=["x [m]","y [m]"]);**

Vektory rychlosti $[V_x, V_y]$ (červená-nebrzděná, modrá-brzděná do zastavení, černá-zpomalení v intervalu $(0, a0)$), viz. Graf č.2.

> **display({GVV0,GVA0,seq(Q2[j],j=1..nu-1)},labels=["Vx [m/s]","Vy [m/s]"]);**

Absolutní velikost zrychlení v závislosti na čase (červená-nebrzděná, modrá-brzděná do zastavení, černá-zpomalení v intervalu $(0, a0)$), viz. Graf č.3.

> **display({GA0,GAA0,seq(Q3[j],j=1..nu-1)},labels=["t [s]","|A| [m/s²]"]);**

V závěru této části výpočtu docházíme ke zjištění, že pro mírné brzdění se tvary trajektorií příliš neliší od nebrzděné trajektorie. Proto následuje sledování trajektorie jednotlivých kol, které bude prováděno pouze pro rovnoměrný pohyb.

Sledování trajektorie jednotlivých kol autobusu

Nejprve musíme vytvořit správný matematický model autobusu, kde využijeme obecný jednotkový vektor ve směru rychlosti autobusu eV a dále obecný jednotkový vektor kolmý na směr rychlosti autobusu eN . Pomocí těchto vektorů lze získat polohu jednotlivých kol autobusu, Kzp – kolo zadní pravé, Kzl – kolo zadní levé, Kpp – kolo přední pravé, Kpl – kolo přední levé. Aby se všechny výpočty provedly pouze jednou je použita nová proměnná $Kolo = P + \delta eV + p eN$ ze které se dají souřadnice jednotlivých kol autobusu odvodit podle vztahu:

$$Kzp: \delta = 0, p = -r/2, Kzl: \delta = 0, p = +r/2, Kpp: \delta = d, p = -r/2, Kpl: \delta = d, p = +r/2,$$

kde d = rozvor náprav a r = rozchod náprav autobusu. Tento postup umožní výpočty pro všechna kola provést pouze jednou pro proměnnou Kolo a do té pak dosadit podle výše uvedeného schématu.

> **Kolo := 'P' + delta * 'eV' + p * 'eN';**

$$Kolo := P + \delta eV + p eN \quad (31)$$

eV - jednotkový vektor směru rychlosti.

> **eV := map(u->u/V0,V);**

$$eV := \left[\cos \left(\int_0^t \frac{4V0\tau(tf-\tau)}{tf^2 dn} d\tau \right), \sin \left(\int_0^t \frac{4V0\tau(tf-\tau)}{tf^2 dn} d\tau \right) \right] \quad (32)$$

eN - jednotkový vektor, kolmý na směr rychlosti.

> **eN := [eV[2], -eV[1]];**

$$eN := \left[\sin \left(\int_0^t \frac{4V0\tau(tf-\tau)}{tf^2 dn} d\tau \right), -\cos \left(\int_0^t \frac{4V0\tau(tf-\tau)}{tf^2 dn} d\tau \right) \right] \quad (33)$$

Souřadnice kol po zjednodušení.

> **Kolo:=simplify(Kolo);** > **Kolo:=simplify(combine(subs(tf=TF,value(expand(Kolo)))));**

$$\begin{aligned}
 Kolo := & \left[V0 \int_0^t \cos\left(\frac{8V0^2 \tau^2 (9\pi d n - 8\tau V0)}{27\pi^2 d^3 n^3}\right) d\tau + \delta \cos\left(\frac{8V0^2 t^2 (9\pi d n - 8t V0)}{27\pi^2 d^3 n^3}\right) \right. \\
 & + p \sin\left(\frac{8V0^2 t^2 (9\pi d n - 8t V0)}{27\pi^2 d^3 n^3}\right), \\
 & V0 \int_0^t \sin\left(\frac{8V0^2 \tau^2 (9\pi d n - 8\tau V0)}{27\pi^2 d^3 n^3}\right) d\tau + \delta \sin\left(\frac{8V0^2 t^2 (9\pi d n - 8t V0)}{27\pi^2 d^3 n^3}\right) \\
 & \left. - p \cos\left(\frac{8V0^2 t^2 (9\pi d n - 8t V0)}{27\pi^2 d^3 n^3}\right) \right] \quad (34)
 \end{aligned}$$

Souřadnice kol po dosažení zvolených numerických hodnot.

> **kolo:=subs(Su,Kolo);**

$$\begin{aligned}
 kolo := & \left[7 \int_0^t \cos\left(\frac{49\tau^2 (108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right) d\tau + \delta \cos\left(\frac{49t^2 (108\pi - 56t)}{5832\pi^2}\right) \right. \\
 & + p \sin\left(\frac{49t^2 (108\pi - 56t)}{5832\pi^2}\right); 7 \int_0^t \sin\left(\frac{49\tau^2 (108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right) d\tau \\
 & \left. + \delta \sin\left(\frac{49t^2 (108\pi - 56t)}{5832\pi^2}\right) - p \cos\left(\frac{49t^2 (108\pi - 56t)}{5832\pi^2}\right) \right] \quad (35)
 \end{aligned}$$

Souřadnice kol ve 200 časových okamžicích.

> **KTR:=[seq(evalf(kolo),t=T)];**

Souřadnice kol ve tvaru vhodném pro dosazení do předem připravených vzorců.

> **X(t):=kolo[1]; Y(t):=kolo[2];**

$$\begin{aligned}
 X(t) &:= 7 \int_0^t \cos\left(\frac{49\tau^2(108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right) d\tau + \delta \cos\left(\frac{49\tau^2(108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right) \\
 &+ p \sin\left(\frac{49\tau^2(108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right) \\
 Y(t) &:= 7 \int_0^t \sin\left(\frac{49\tau^2(108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right) d\tau + \delta \sin\left(\frac{49\tau^2(108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right) \\
 &- p \cos\left(\frac{49\tau^2(108\pi - 56\tau)}{5832\pi^2}\right)
 \end{aligned} \tag{36}$$

Trajektorie jednotlivých kol (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.4.

>**G1:=plot([subs(p=0.8,delta=0,KTR),subs(p=0.8,delta=0,KTR),subs(p=0.8,delta=6,KTR),subs(p=0.8,delta=6,KTR)],scaling=constrained,thickness=2,labels=["x [m]","y [m]"]); G1;**

Trajektorie kol a poloha autobusu v 11 časových okamžicích, viz. Graf č.5.

>**display({G1,polygonplot([seq([subs(p=0.8,delta=0,KTR[j+1]),subs(p=0.8,delta=0,KTR[j+1]),subs(p=0.8,delta=6,KTR[j+1]),subs(p=0.8,delta=6,KTR[j+1])],j=20*[\$0..10]),scaling=constrained)});**

Vektory rychlosti jednotlivých kol (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.6.

>**plot([subs(p=0.8,delta=0,[Vx,Vy,t=0..Tfs]),subs(p=0.8,delta=0,[Vx,Vy,t=0..Tfs]),subs(p=0.8,delta=6,[Vx,Vy,t=0..Tfs]),subs(p=0.8,delta=6,[Vx,Vy,t=0..Tfs])],thickness=2,labels=["Vx [m/s]","Vy [m/s]"]);**

Absolutní velikost rychlosti jednotlivých kol (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.7.

>**plot([subs(p=0.8,delta=0,AV),subs(p=0.8,delta=0,AV),subs(p=0.8,delta=6,AV),subs(p=0.8,delta=6,AV)],t=0..Tfs,thickness=2,labels=["t [s]","|V| [m/s]"]);**

Vektory zrychlení $[A_x, A_y]$ (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.8.

```
>plot([subs(p=0.8,delta=0,[Ax,Ay,t=0..Tfs]),subs(p=-
0.8,delta=0,[Ax,Ay,t=0..Tfs]),subs(p=0.8,delta=6,[Ax,Ay,t=0..Tfs]),subs(p=-
0.8,delta=6,[Ax,Ay,t=0..Tfs])],thickness=2,labels=["Ax [m/s2]", "Ay [m/s2]"]);
```

Vektory zrychlení $[A_t, A_n]$ (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.9.

```
>plot([subs(p=0.8,delta=0,[At,An,t=0..Tfs]),subs(p=-
0.8,delta=0,[At,An,t=0..Tfs]),subs(p=0.8,delta=6,[At,An,t=0..Tfs]),subs(p=-
0.8,delta=6,[At,An,t=0..Tfs])],thickness=2,labels=["At [m/s2]", "An [m/s2]"]);
```

Absolutní velikost zrychlení jednotlivých kol (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.10.

```
>plot([subs(p=0.8,delta=0,AA),subs(p=-0.8,delta=0,AA),subs(p=0.8,delta=6,AA),subs(p=-
0.8,delta=6,AA)],t=0..Tfs,thickness=2,labels=["t [s]", "|A| [m/s2]"]);
```

Středý křivosti jednotlivých kol (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.11.

```
>plot([subs(p=0.8,delta=0,[COx,COy,t=0..Tfs]),subs(p=-
0.8,delta=0,[COx,COy,t=0..Tfs]),subs(p=0.8,delta=6,[COx,COy,t=0..Tfs]),subs(p=-
0.8,delta=6,[COx,COy,t=0..Tfs])],view=[-20..10,10..20],thickness=2,labels=["COx [m]", "COy [m]"]);
```

Středý křivosti – detail předních kol (*Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.12.

```
> plot([subs(p=0.8,delta=6,[COx,COy,t=0..Tfs]),subs(p=-
0.8,delta=6,[COx,COy,t=0..Tfs])],view=[0..7,11..15],thickness=2,labels=["COx [m]", "COy [m]"],color=[blue,gold]);
```

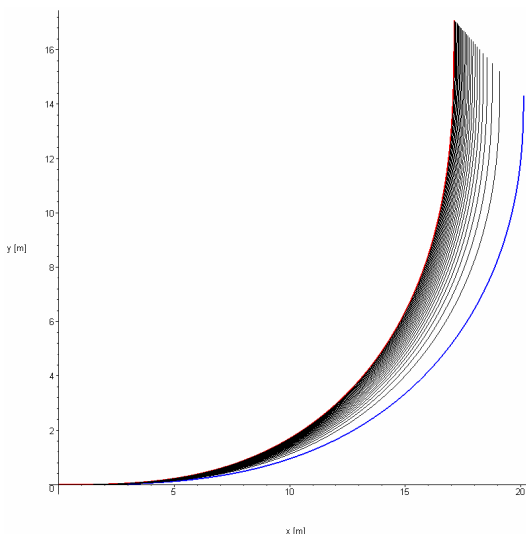
Křivosti dráhy jednotlivých kol (*Kzp*-červená, *Kzl*-zelená, *Kpp*-zlatá, *Kpl*-modrá), viz. Graf č.13.

```
>plot([subs(p=0.8,delta=0,Kappa),subs(p=-
0.8,delta=0,Kappa),subs(p=0.8,delta=6,Kappa),subs(p=-
0.8,delta=6,Kappa)],t=0..Tfs,thickness=2,labels=["t [s]", "k [1/m]"]);
```

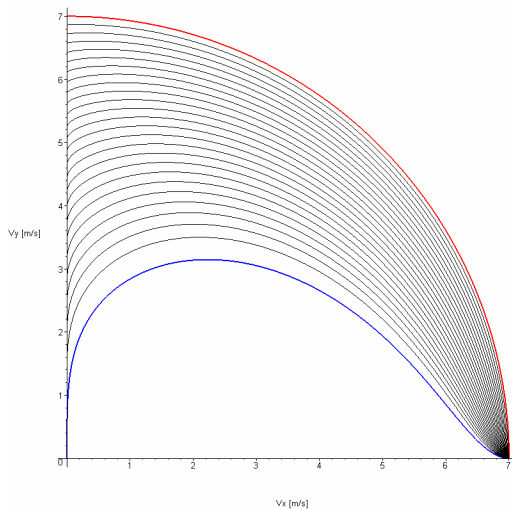
VÝSLEDKY A DISKUZE

Při konstantním a také při mezním brzdění se tvar trajektorie mění jen nepatrně, a z hlediska geometrie zůstává trajektorie autobusu téměř nezměněna, viz. Graf č. 1. Z pohledu průběhu vektoru rychlosti se maximum rychlosti ve směru osy y přesouvá z hodnoty tf (doba výjezdu ze zatáčky) do kratších časových okamžiků a to v závislosti na velikosti zpomalení, viz. Graf č.2. Absolutní velikost zrychlení autobusu (odstředivé zrychlení + zpomalení) se při maximum velikosti zrychlení snižuje v závislosti na velikosti zpomalení autobusu, přičemž okamžik dosažení maxima se příliš nemění, viz. Graf č.3.

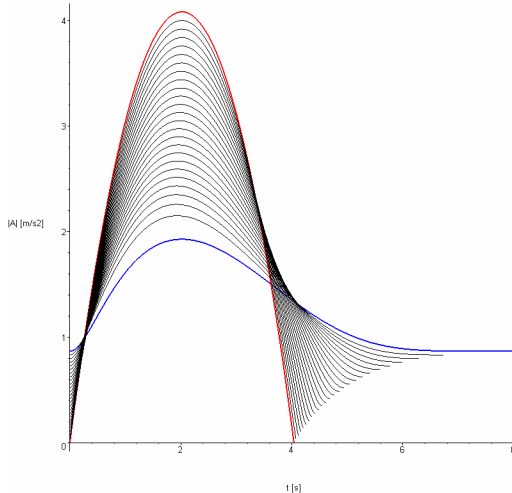
Je zřejmé, že trajektorie každého kola autobusu je jiná a tím pádem i všechny kinematické veličiny, odpovídající jednotlivým kolům jsou navzájem různé, viz. Grafy č. 4-10. Je vhodné zdůraznit skutečnost, že středy křivosti trajektorie zadních kol jsou totožné, ale odlišné od středu křivosti trajektorie kol předních, které jsou navíc navzájem různé, viz Graf č. 11 a Graf č. 12. Křivosti dráhy jednotlivých kol jsou zobrazeny viz. Graf č.13.



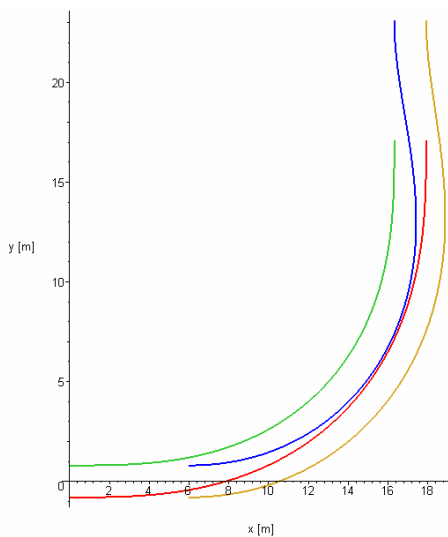
Graf 1. Trajektorie autobusu při ustáleném zatáčení (červená-nebrzděná, modrá-brzděná do zastavení, černá-zpomalení v intervalu $(0, a_0)$)



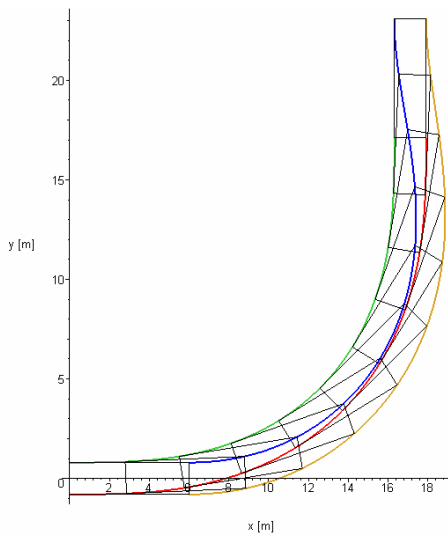
Graf 2. Vektory rychlosti $[V_x, V_y]$ (červená-nebrzděná, modrá-brzděná do zastavení, černá-zpomalení v intervalu $(0, a_0)$)



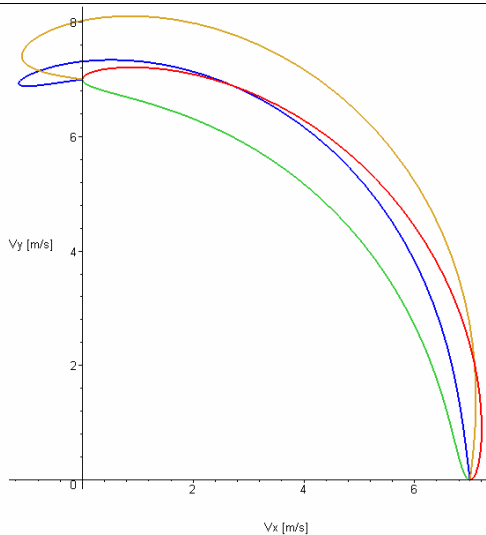
Graf 3. Absolutní velikost zrychlení v závislosti na čase (červená-nebrzděná, modrá-brzděná do zastavení, černá-zpomalení v intervalu $(0, a_0)$), a_0 – mezní brzdění



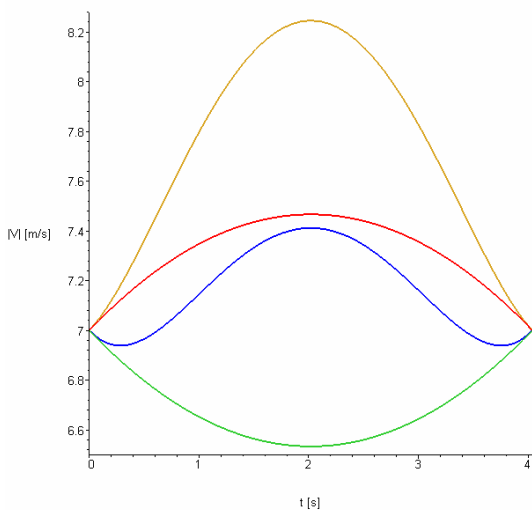
Graf 4. Trajektorie jednotlivých kol (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



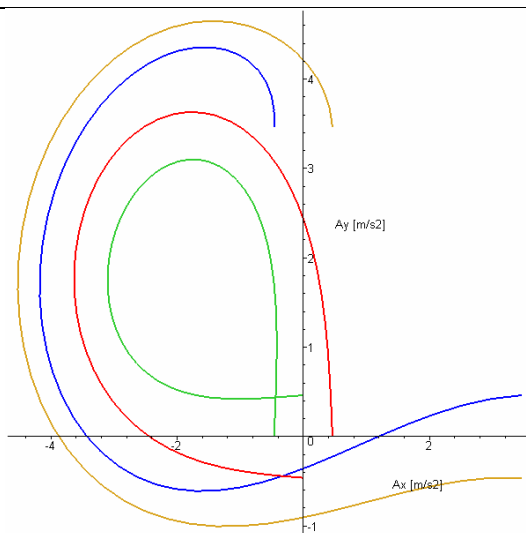
Graf 5. Trajektorie kol a poloha autobusu v jedenácti časových okamžicích



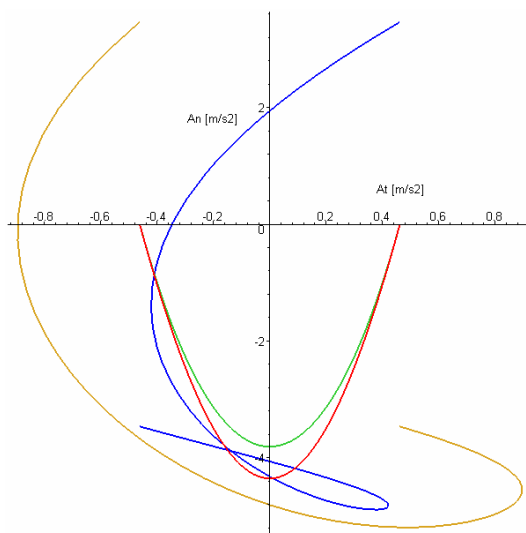
Graf 6. Vektory rychlosti $[V_x, V_y]$ jednotlivých kol (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



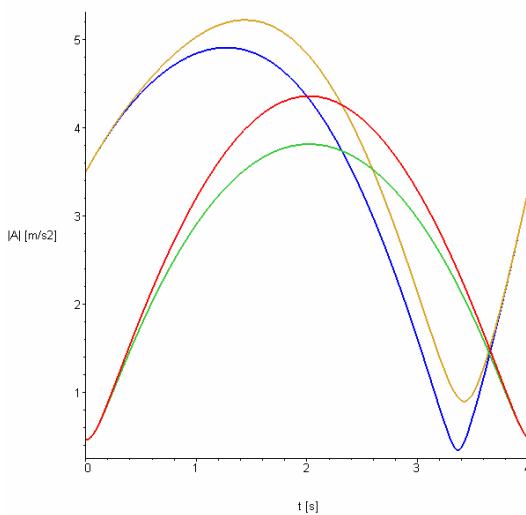
Graf 7. Absolutní velikost rychlosti jednotlivých kol (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



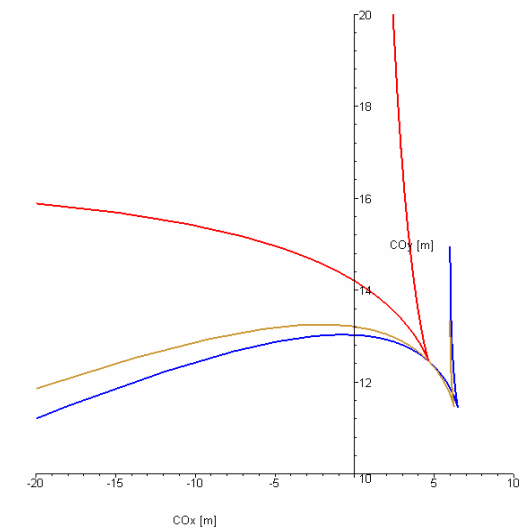
Graf 8. Vektory zrychlení [A_x , A_y] (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



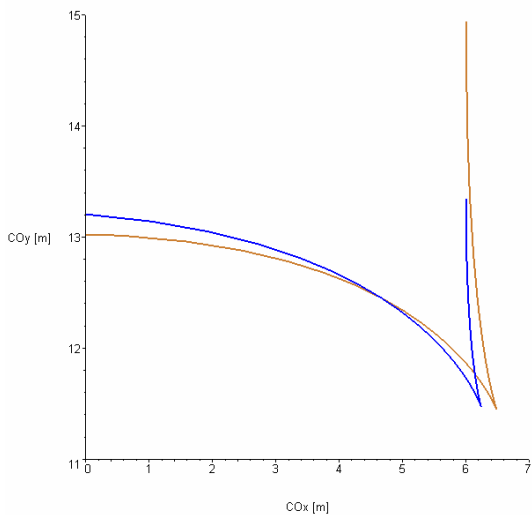
Graf 9. Vektory zrychlení [A_t , A_n] (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



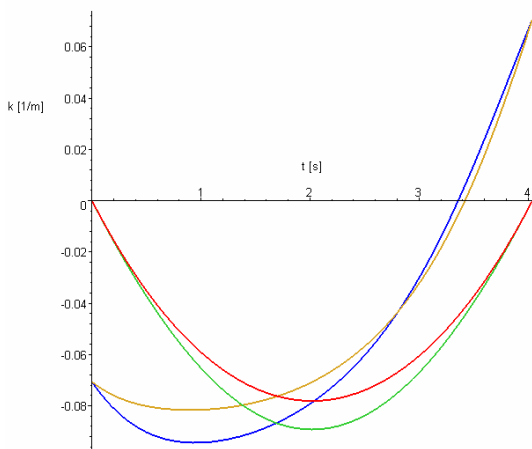
Graf 10. Absolutní velikost zrychlení jednotlivých kol (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



Graf 11. Střed y křivosti jednotlivých kol (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



Graf 12. Středý křivostí – detail předních kol pro okolí maxima křivostí trajektorie (Kpp-zlatá, Kpl-modrá)



Graf 13. Křivostí dráhy jednotlivých kol (Kzp-červená, Kzl-zelená, Kpp-zlatá, Kpl-modrá)

ZÁVĚR

Na základě předložených výsledků je možné analyticky určit časovou závislost polohy libovolného bodu uvnitř autobusu, tzn. je možné odvodit vztahy pro působící zrychlení a to jak na řidiče, cestující, tak i celý autobus a použít tyto výsledky pro objektivní stanovení optimální rychlosti při průjezdu zatáčkou a to především z hlediska bezpečnosti cestujících s ohledem na technické parametry vozidla. Plynulou jízdou dosáhneme zvýšení efektivnosti, provozní spolehlivosti a hlavně jízdní bezpečnosti, což by nebylo možné bez vědeckého zdůvodnění a analýzy základních fyzikálních a technických veličin, které určují kinematiku autobusu.

LITERATURA

Bartoň S., Krumpholc T., *Stanovení trajektorie vozidla - inverzní problém kinematiky*, [CD-ROM]. In SCO Workshop Maple 2011, 25.6. 2011, FSS MU, Brno, s. 1-8.

Czudková L., *Fyzika (automobilové) dopravní nehody*, Československý časopis pro fyziku, Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, Praha 2010, 3.vydání, svazek 60, s. 140-141. ISSN 0009-0700

Dalecký P., *Budoucnost městské přepravy osob - autobusy základem*, AutoProfi, 2011, XIX., s. 56-57.

Krumpholc T., Bartoň S., *Stanovení trajektorie vozidla po zásahu řidiče do řízení*, In Kvalita a spolehlivost technických systémů - Zborník vedeckých prác., 24.-25.5. 2011, TF SPU Nitra, s. 186-191., ISBN 978-80-552-0595-3

MAPLESOFT, *Maple 12- User Manual*., Waterloo Maple 2008, ISBN 978-1-897310-48-9

VLK, F. *Dynamika motorových vozidel*. 1.vyd., Nakladatelství Vlk, Brno 2000, 434 s.,

ISBN 80-238-5273-6