

DRIVER'S INFLUENCE ON KINEMATICS OF ARTICULATED BUS

VLIV ŘIDIČE NA KINEMATIKU KLOUBOVÉHO AUTOBUSU

Krumpholc T., Bartoň S.

Department of Engineering and Automobile Transport, Faculty of Agronomy, Mendel University in Brno, Zemědělská 1/1665, 613 00 Brno, Czech Republic

E-mail: xkrumpho@mendelu.cz

ABSTRACT

This thesis studies kinematic properties of the particle bus as a function of driver's activities. Driver controls bus by the gas and brake pedals – by speed change $v(t)$ and by steering wheel – by curvature of the trajectory change $k(t)$. Article is divided into four main parts. At first part is computed trajectory of the midpoint of the middle axle as a function of the absolute value of the velocity $v(t)$ and of the curvature of the trajectory $k(t)$. At second part is computed position of the centre of the joint of the bus. At the third part is derived system of the differential equations describing relations between positions of the joint's centre and the midpoint of the rear axle. At the final part is shown how to solve these equations and how to find trajectory of the wheels and cranking angle of the bus. Programme of the computer algebra system Maple is used for all necessary computations.

Key words: Trajectory, velocity, acceleration, curvature, differential equation, Runge-Kutta method, Maple

ÚVOD

Klasický problém kinematiky

Pro zkrácení výpisu matematických vztahů použijeme následující substituce:

$$\frac{d^2}{dt^2} X(t) = X_{tt}, \quad \frac{d}{dt} X(t) = X_t, \quad X(t) = X, \quad (1)$$

podobné substituce budou použity i pro další proměnné $Y(t)$, $x(t)$ a $y(t)$. Klasickým problémem kinematiky je určení vektorů rychlosti $\vec{V}(t)$ a zrychlení tělesa $\vec{A}(t)$ v závislosti na čase, pokud je známa závislost polohového vektoru tělesa na čase, $\vec{P}(t) = [X(t), Y(t)]$, kde $X(t)$ a $Y(t)$ jsou známé závislosti souřadnic x a y na čase. Dále se stanovuje tečné zrychlení $A_t(t)$, které mění velikost rychlosti a normálové zrychlení $A_n(t)$, které mění směr rychlosti tělesa. Závěrem se odvozují vztahy pro polohu středu oskulační kružnice trajektorie $\vec{C}(t)$ a pro její poloměr $R(t)$. Tyto vztahy lze nalézt např. v [7] a [8].

Vliv řidiče

Řidič ovládá autobus pomocí brzdy a plynového pedálu - určuje absolutní velikost rychlosti autobusu $|\vec{V}(t)|$. Dále pomocí volantu určuje poloměr oskulační kružnice $R(t)$, po které se autobus aktuálně pohybuje. Z hlediska dalších výpočtů je však vhodné použít převrácenou hodnotu poloměru oskulační kružnice – křivost trajektorie, $k(t) = 1/R(t)$. Vhodnou kombinací těchto ovládacích prvků tak udržuje autobus v plynulém pohybu po vozovce.

MATERIÁL A METODIKA

Inverzní problém

Předpokládejme, že známe časový průběh činností řidiče, tedy známe průběh absolutní velikosti rychlosti $|\vec{V}(t)| = v(t)$ a křivosti trajektorie $k(t)$ na čase. Problémem pak je určení trajektorie, po které se autobus pohybuje a dalších kinematických veličin. Z matematického hlediska tedy jde o řešení nelineárního systému dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého a prvního řádu, detailní postup řešení je uveden v [2] a [3]:

$$\sqrt{X_t^2 + Y_t^2} = v(t), \quad \frac{Y_{tt}X_t - X_{tt}Y_t}{(X_t^2 + Y_t^2)^{3/2}} = k(t). \quad (2)$$

Po několika úpravách je možné rovnice (2) převést na explicitní systém dvou diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$X_{tt} = -\frac{Y_t k(t) v(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} v(t)\right) X_t}{v(t)}, \quad Y_{tt} = \frac{\left(\frac{d}{dt} v(t)\right) Y_t + k(t) v(t)^2 X_t}{v(t)}. \quad (3)$$

Pokud budeme předpokládat polohu autobusu v čase $t=0$, $X(0)=x_0$ a $Y(0)=y_0$ a vektor počáteční rychlosti autobusu $\vec{V}(0)=[V_x, V_y, 0] = v(0)[\cos(\phi_0), \sin(\phi_0)]$, kde ϕ_0 je směr jednotkového vektoru odpovídající vektoru rychlosti v čase $t=0$ a $v(0)=|\vec{V}(0)|$, je možné nalézt řešení (3) ve tvaru, viz [4,5].

$$X = \int_0^t v(\tau) \cos(f) d\tau + x_0, \quad Y = \int_0^t v(\tau) \sin(f) d\tau + y_0, \quad (4)$$

kde $f = \phi_0 + \int_0^\tau v(\tau) k(\tau) d\tau$. Obecně jde o analytické řešení, nicméně integrály v obou rovnicích nebudou analyticky řešitelné ani pro jednoduché závislosti $v(t)$ a $k(t)$. Značnou výhodou tohoto výsledku je, že umožňuje numericky přesnou integraci pro libovolný čas t a nedochází proto ke

kumulaci nepřesností, jako při řešení systému (4) numerickými metodami, např. metodou Runge-Kutta.

Zobecněná tratrix jako matematický model trajektorie zadní nápravy

Kloub autobusu je umístěn ve vzdálenosti $d1$ od středu prostřední nápravy kloubového autobusu. Trajektorie kloubu je pak dána vztahem

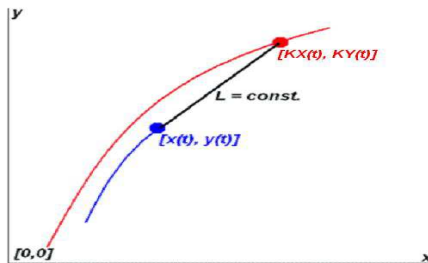
$$KX(t) = X - d1 \frac{X_t}{v(t)}, \quad KY(t) = Y - d1 \frac{Y_t}{v(t)}, \quad (5)$$

Střed zadní nápravy kloubového autobusu - vlečené nápravy má prozatím neznámou polohu $[x(t), y(t)]$. Střed obou náprav musí mít konstantní vzdálenost L a vektor rychlosti středu vlečené nápravy musí procházet kloubem $[KX(t), KY(t)]$, viz obrázek 1. Z těchto podmínek lze v souladu s [1] nebo [9] odvodit závislost mezi $[KX(t), KY(t)]$ a $[x(t), y(t)]$.

$$x_t = \frac{(\Delta X X_t + \Delta Y Y_t) \Delta X}{L^2}, \quad y_t = \frac{(\Delta X + \Delta Y Y_t) \Delta Y}{L^2}, \quad (6)$$

kde $\Delta X = x - KX$, $\Delta Y = y - KY$. Jde o systém dvou nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, který je možné pro jednoduché funkce $KX(t)$ a $KY(t)$ poměrně snadno řešit. Pokud se ale za $KX(t)$ a $KY(t)$ dosadí (4) a (5) dostaneme velmi komplikovaný systém diferenciálních rovnic, ve kterých je nutné nejprve řešit numerickou integraci $X(t)$ a $Y(t)$. V tomto okamžiku selhávají prostředky computerové algebry, např. není možné použít přímé numerické řešení systému pomocí příkazu **dsolve** s parametrem **numeric** z programu Maple.

Obrázek 1. Odvození pohybové rovnice vlečené nápravy



Numerická integrace pohybové rovnice

Systém rovnic (6) s ohledem na (4) a (5) je možné řešit pomocí přímého použití metody Runge-Kutta, [10]. Nicméně je nutné pro tuto metodu vytvořit speciální proceduru v Maple, která přesně odpovídá uvedenému postupu. V každém kroku procedury je tak možné provést numerickou integraci $X(t)$ a $Y(t)$.

Tato procedura, nazvaná **RK45**, spočítá polohu a rychlost středu vlečené nápravy v čase $t + Dt$. Další procedura s názvem **STEP**, viz (7), určuje velikost časového kroku Dt metodou půlení časového kroku. Pro první iteraci se zvolí libovolná velikost časového kroku, např. $Dt = 1$ a provede se výpočet polohy pro čas $t + Dt$. Podobně se provede výpočet polohy stejnou procedurou, ale ve dvou krocích s poloviční velikostí Dt . Pokud bude rozdíl poloh získaných v prvním a druhém výpočtu menší než požadovaná přesnost 10^{-6} přidá se vypočtená poloha do vektoru Λ , obsahujícího časový krok a souřadnice polohy středu vlečené nápravy. V případě, že je rozdíl poloh větší, sníží se velikost časového kroku na polovinu a celý postup se zopakuje.

```
STEP := proc(U) local l, R2; global R1, Λ, Dt, t;
  l := U[ ]; R2 := [RK45(RK45(l, Dt/2), Dt/2)]; R1 := [RK45(l, Dt)];
  if sqrt(add(u2, u = R1 - R2)) ≤ 10-6 then Λ := [Λ[ ], R1]; t := t + Dt;
  else Dt := Dt/2 end if
end proc
```

(7)

VÝSLEDKY A DISKUZE

Praktická aplikace

Předpokládejme rovnoměrně zpomalený průjezd pravouhloú zatáčkou. Pro tento případ je možné zvolit

$$v(t) = V_0 - a t, \quad k(t) = \frac{4t(T_f - t)}{T_f^2 \rho}, \quad (8)$$

kde V_0 je počáteční rychlost, a je zpomalení, T_f je doba průjezdu zatáčkou a ρ je nejmenší poloměr projížděné zatáčky.

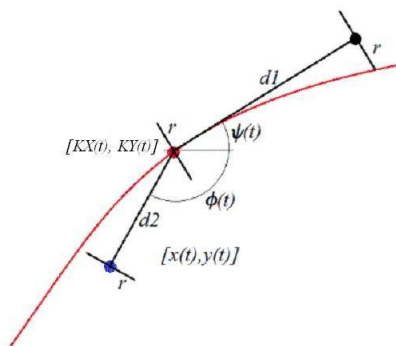
Určení času pro průjezd zatáčkou

Pokud se zvolí směr rychlosti v čase $t=0$ rovnoběžný s osou x , tedy $\phi_0=0$, bude zatáčka ukončena v okamžiku, kdy vektor okamžité rychlosti $[X_t, Y_t]$ bude rovnoběžný s osou y . Musí tedy platit $X_t = 0$. Z této podmínky pak je zřejmé, že s ohledem na (4) musí být splněno

$$T_f = \frac{1}{2} \frac{2V_0 - \sqrt{4V_0^2 - 6a\pi\rho}}{a}. \quad (9)$$

Numerický příklad - iterace

Jako konkrétní hodnoty je možné zvolit $V_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a = 0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho = 20 \text{ m}$, $x_0 = 0 \text{ m}$, $y_0 = 0 \text{ m}$, $d_1 = 1.95 \text{ m}$ a $L = 4.625 \text{ m}$. Pro tyto hodnoty vychází čas nutný pro průjezd zatáčkou $T_f = 5.45680775 \text{ s}$. Počáteční čas je $t=0$ a počáteční časový krok $Dt = T_f = 5.45680775 \text{ s}$. Nyní je nutné vytvořit vektor Λ , jeho první prvek bude $[t, -L - d_1, 0]$, tedy $\Lambda := [[0, -6.575, 0]]$. Procedura **STEP** nejprve určí velikost časového kroku na $Dt = T_f / 128 = 0.04263131055 \text{ s}$ a poté provede 128 iteračních kroků. Pro jednotlivé iterační časy je možné dopočítat podle vztahu (4) polohu středního bodu a podle vztahu (5) spojovacího kloubu. Podle obrázku 2. a následujícího vztahu (10) je dále možné dopočítat polohu kol přední, střední a zadní vlečené nápravy a také polohu libovolného bodu obrysu autobusu.



$$Kolo = P + d[\cos(\alpha), \sin(\alpha)] + r[-\sin(\alpha), \cos(\alpha)]. \quad (10)$$

kde $P = [KX, KY]$, za d lze dosadit vzdálenost paty kolmice spuštěné ze studovaného bodu na osu přední nebo zadní části autobusu od kloubu autobusu. Za r lze dosadit vzdálenost studovaného bodu od osy přední nebo zadní části autobusu. Za α je možné dosadit $\psi(t)$ - směrový vektor spojnice středu střední a přední nápravy - směrový vektor rychlosti $[X_t, Y_t]$ nebo $\phi(t)$ směrový vektor spojnice středu zadní nápravy a kloubu.

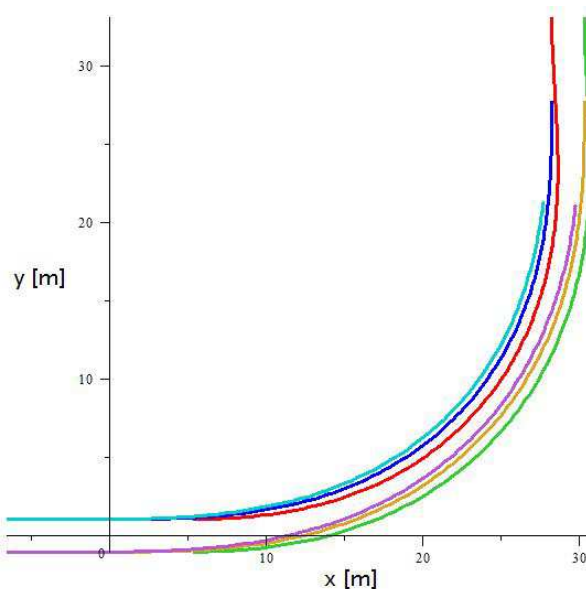
Velikosti úhlů $\psi(t)$ a $\phi(t)$ lze snadno dopočítat pomocí vektorového počtu. Výsledkem výpočtu tak může být graf na obrázku 3., znázorňující trajektorie jednotlivých kol, graf na obrázku 4, znázorňující trajektorii obrysu autobusu nebo graf na obrázku 5., který zobrazuje úhel zalomení kloubu autobusu.

ZÁVĚR

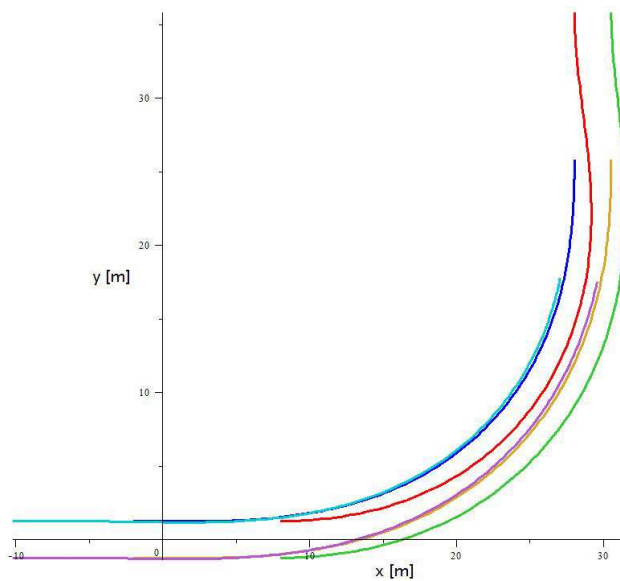
Vhodnou volbou průběhu rychlosti $v(t)$ a křivosti trajektorie $k(t)$ lze výše uvedeným postupem modelovat průběh všech významných kinematických veličin a to pro libovolný bod uvnitř autobusu - stačí pouze zvolit vhodné hodnoty proměnných, d a r odpovídajících obrázku 2. a rovnici (10). Dále je možné provést výpočty zrychlení libovolného bodu, tedy i bodů, které odpovídají bodům styku jednotlivých kol s vozovkou. Znalosti zrychlení mohou být využity pro stanovení mezních hodnot adheze. Tento postup je možné využít i obráceně. Z okamžiku, kdy došlo ke ztrátě adheze - ke smyku je možné pokusně nalézt takové průběhy rychlosti a křivosti trajektorie, které ji způsobily. Je tak možné z průběhu trajektorie - brzdné dráhy odhadnout činnosti řidiče, které této události předcházely.

Ze znalosti průběhu zrychlení uvnitř autobusu je možné provést výpočty celkové síly, která působí na celý autobus nebo na jednotlivé cestující. Znalost celkové síly je důležitým faktorem ovlivňujícím jeho stabilitu. Síla, která působí na jednotlivé cestující je rozhodujícím faktorem, který určuje jejich bezpečnost. Výše uvedená metoda tak umožňuje modelovat chování řidiče na bezpečnost cestujících v závislosti na jejich poloze uvnitř autobusu.

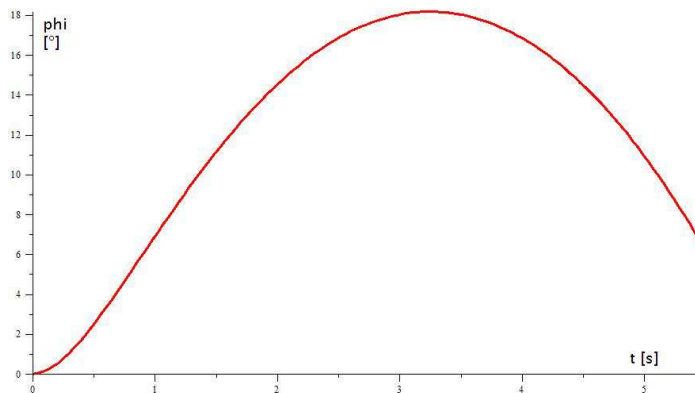
Obrázek 3. Trajektorie jednotlivých kol autobusu



Obrázek 4. Obrysová trajektorie



Obrázek 5. Úhel zalomení kloubu autobusu



LITERATURA

1. Gander, W., Hřebíček, J.: The tractrix and similar curves. In: GANDER, W. -- HŘEBÍČEK, J. Solving problems in Scientific Computing using Maple and Matlab. 4. ed., Heidelberg: Springer, 2004. s. 1--26. ISBN 3-540-21127-6.
2. Krumpholc, T. Bartoň, S.: Matematický model řízení zatáčky autobusu. [CD-ROM]. In Recent Advances in Agriculture, Mechanical Engineering and Waste. s. 120--125. SPU Nitra, 2012, ISBN 978-80-552-0781-0.
3. Bartoň, S., Krumpholc, T.: Stanovení trajektorie vozidla -- inverzní problém kinematiky. [CD-ROM]. In SCO 2011 Workshop Maple. s. 1--8.
4. Krumpholc, T., Bartoň, S.: Stanovení trajektorie vozidla po zásahu řidiče do řízení. [CD-ROM]. In Kvalita a spolehlivost' technických systémů - Zborník vedeckých prác. s. 186--191. SPU Nitra, 2011, ISBN 978-80-552-0595-3.
5. Krumpholc, T., Bartoň, S.: Studie trajektorie autobusu při brzděném průjezdu zatáčkou. [CD-ROM]. In MendelNet 2011 - Proceedings of International Ph.D. Students Conference. s. 879--904. ISBN 978-80-7375-563-8.
6. Brand, L.: Vector and Tensor Analysis. John Wiley, New York, 1947, s 121--124
7. McCarthy, J., M.: Introduction to Theoretical Kinematics. The Mit Press, 1990, ISBN 978-0262132527
8. http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/webFyzika_vztahy_mechanika.pdf
9. Spallek, K.: Kurven und Karten. Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1980, ISBN 3-411-01593-4
10. Ralston, A.: Základy numerické matematiky, Academia Praha, 1978.